Contrôle continu du 07/11/2009

Question 1. Période de $\cos x = 2\pi$

$\Downarrow$

$\begin{cases} \text{période de } \cos 2x = \pi & (\cos 2(x+\pi) = \cos(2x+2\pi) = \cos 2 \\ \text{période de } \cos 6x = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \end{cases}$

période de $f(x) = \pi$

Question 2. $f(x) = |x-3| + |x+3| - 2|x|$

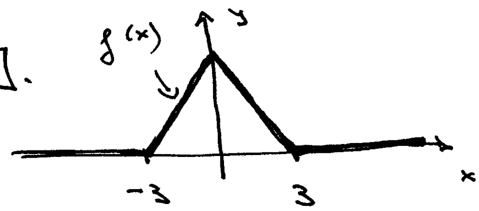
$x \leq -3 \Rightarrow f(x) = -(\cancel{x}-\cancel{3}) - (\cancel{x}+\cancel{3}) - 2(-\cancel{x}) = 0$

$x \in (-3, 0] \Rightarrow f(x) = -(\cancel{x}-3) + \cancel{x}+3 - 2(-x) = 2x+6$

$x \in [0, 3) \Rightarrow f(x) = -(\cancel{x}-3) + \cancel{x}+3 - 2x = -2x+6$

$x \geq 3 \Rightarrow f(x) = x-3+x+3-2x = 0$

Donc $\operatorname{supp} f = [-3, 3]$.



Question 3. Par exemple, $f_n(x) = x^2 + x^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

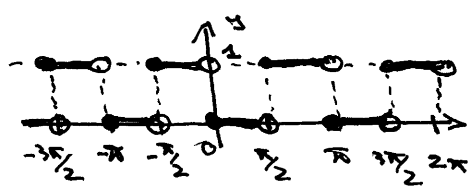
Pour tout $x \in (0,1)$ $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$, donc $\{f_n(x)\}$ converge simplement vers $f(x)$.

D'autre part $\lim_{n\to\infty} \sup |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sup_{x \in I} x^n}_{=1} =$

$= \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow$ on n'a pas de convergence uniforme

Question 4. Par exemple

$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \in [0, \frac{\pi}{2}) \\ 1 & \text{pour } x \in [\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases}$



prolongée par périodicité. $\forall x \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ $S_f(x)$ converge vers $f(x)$. Par contre pour $x \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ $S_f(x)$ converge vers $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \frac{1}{2}$. Donc en ces points $f(x) \neq S_f(x)$.

Question 5. On utilisera le graphe dans Q2, ainsi que d'autres résultats de Q2.

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx =$$

(1) $$= \int_{-3}^{0} (2x+6)\varphi(x)\,dx + \int_{0}^{3} (-2x+6)\varphi(x)\,dx$$

Donc

$$\langle (T_f)', \varphi \rangle \overset{def}{=} -\langle T_f, \varphi' \rangle = |\text{d'après } (1)| =$$

$$= -\int_{-3}^{0} (2x+6)\,\varphi'(x)\,dx - \int_{0}^{3} (-2x+6)\,\varphi'(x)\,dx =$$

$$= |\text{on intègre par parties}| =$$

$$= -(2x+6)\varphi(x)\Big|_{-3}^{0} + \int_{-3}^{0} 2\varphi(x)\,dx$$

$$-(-2x+6)\varphi(x)\Big|_{0}^{3} + \int_{0}^{3} (-2)\,\varphi(x)\,dx =$$

$$= -\cancel{6\varphi(0)} + \underbrace{(-3\cdot 2+6)}_{=0}\varphi(-3)$$

$$+\int_{-3}^{0} 2\varphi(x)\,dx - \underbrace{(-2\cdot 3+6)}_{=0}\varphi(3)$$

$$+\cancel{6\varphi(0)} + \int_{0}^{3} (-2)\,\varphi(x)\,dx$$

$$= \int_{-3}^{0} 2\,\varphi(x)\,dx + \int_{0}^{3} (-2)\,\varphi(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\varphi(x)\,dx = \langle T_g, \varphi \rangle,$$

où

(2) $$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \in (-3,0) \\ -2 & \text{si } x \in (0,3) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc, au sens des distributions, $f' = g$.

Pour la 2ième dérivée, on obtient

$$\langle (T_f)'', \varphi \rangle = (-1)^2 \langle T_f, \varphi'' \rangle = -\langle (T_f)', \varphi' \rangle =$$

$$= |\text{d'après } (2)| = -\int_{-3}^{0} 2\,\varphi'(x)\,dx - \int_{0}^{3} (-2)\varphi'(x)\,dx =$$

$$= -2\varphi(x)\Big|_{-3}^{0} + 2\varphi(x)\Big|_{0}^{3} = -2\varphi(0) + 2\varphi(-3) + 2\varphi(3) - 2\varphi(0) =$$

$$= 2\varphi(-3) - 4\varphi(0) + 2\varphi(3) = \langle 2\delta_{-3} - 4\delta_0 + 2\delta_3, \varphi \rangle$$

Donc, au sens des distributions :

$$(T_f)'' = 2\delta_{-3} - 4\delta_0 + 2\delta_3$$

ou

$$f''(x) = 2\delta(x+3) - 4\delta(x) + 2\delta(x-3).$$

Question 6

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = g(t) \\ x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \end{cases} \quad \text{(CI)}$$

1). Pour $g(t) = 0$: on écrit l'équation caractéristique

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i\omega_0$$

$$\Downarrow$$

solution générale de l'équation homogène $\longrightarrow x(t) = C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t$

$$\Downarrow$$

$$\dot{x}(t) = C_1 \omega_0 \cos \omega_0 t - C_2 \omega_0 \sin \omega_0 t$$

En imposant les conditions initiales non-homogènes (CI) on obtient

$$\begin{cases} x(0) = C_1 \underbrace{\sin 0}_{0} + C_2 \cos 0 = C_2 = 0 \\ \dot{x}(0) = C_1 \omega_0 \cos 0 - C_2 \omega_0 \underbrace{\sin 0}_{0} = C_1 \omega_0 = v_0 \end{cases}$$

$$C_1 = \frac{v_0}{\omega_0}, \qquad C_2 = 0$$

$$x_1(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \quad \longleftarrow \text{solution de éq. hom + CI non-hom.}$$

2). Ici on résoud la 2ème partie du problème :

éq. non-hom + CI hom.

(en utilisant la méthode de la fonction de Green).

Choisissons 2 solutions indépendantes de l'équation homogène, par exemple

$$g_1(t) = \sin \omega_0 t, \quad g_2(t) = \cos \omega_0 t$$

Leur wronskien :

$$W(g_1(t), g_2(t)) = \sin \omega_0 t \,(\cos \omega_0 t)' - \cos \omega_0 t \,(\sin \omega_0 t)' =$$

$$= -\omega_0 \sin^2 \omega_0 t - \omega_0 \cos^2 \omega_0 t =$$

$$= -\omega_0.$$

Donc la fonction de Green est donnée par :

$$G(t,t') = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < t' \\ \dfrac{\sin\omega_0 t' \cos\omega_0 t - \sin\omega_0 t \cos\omega_0 t'}{-\omega_0} & \text{pour } t \geq t' \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{pour } t < t' \\ -\omega_0^{-1} \sin\omega_0 (t'-t) & \text{pour } t \geq t' \end{cases}$$

Donc notre solution (de la 2ème partie) est:

$$x_2(t) = \int_0^t G(t,t') f(t')\,dt' = -\omega_0^{-1} \int_0^t \sin\omega_0(t'-t) f(t')\,dt'$$

3). La solution du problème initial:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin\omega_0 t - \omega_0^{-1} \int_0^t \sin\omega_0(t'-t) f(t')\,dt'.$$

Pour $f(t) = f_0 \sin\omega t$ l'intégrale devient:

$$\int_0^t \sin\omega_0(t'-t) f(t')\,dt' = f_0 \int_0^t \cos\omega_0 t \sin\omega_0 t' \sin\omega t'\,dt'$$

$$- f_0 \int_0^t \sin\omega_0 t \cos\omega_0 t' \sin\omega t'\,dt' =$$

$$= f_0 \frac{\cos\omega_0 t}{2} \int_0^t \left[\cos(\omega_0 - \omega)t' - \cos(\omega_0+\omega)t'\right] dt'$$

$$- f_0 \frac{\sin\omega_0 t}{2} \int_0^t \left[\sin(\omega+\omega_0)t' + \sin(\omega-\omega_0)t'\right] dt' =$$

$$= f_0 \frac{\cos\omega_0 t}{2} \left\{ + \frac{\sin(\omega_0-\omega)t'}{\omega_0-\omega} - \frac{\sin(\omega_0+\omega)t'}{\omega_0+\omega} \right\} \Bigg|_0^t$$

$$- f_0 \frac{\sin\omega_0 t}{2} \left\{ - \frac{\cos(\omega+\omega_0)t'}{\omega+\omega_0} - \frac{\cos(\omega-\omega_0)t'}{\omega-\omega_0} \right\} \Bigg|_0^t =$$

$$= f_0 \frac{\cos\omega_0 t}{2} \left\{ + \frac{\sin(\omega_0-\omega)t}{\omega_0-\omega} - \frac{\sin(\omega_0+\omega)t}{\omega_0+\omega} \right\}$$

$$- f_0 \frac{\sin\omega_0 t}{2} \left\{ - \frac{\cos(\omega+\omega_0)t}{\omega+\omega_0} + \frac{1}{\omega+\omega_0} - \frac{\cos(\omega_0-\omega)t}{\omega-\omega_0} + \frac{1}{\omega-\omega_0} \right\} =$$

$$= \frac{f_0}{2} \left\{ - \frac{\sin(\omega_0-\omega)t \cos\omega_0 t - \cos(\omega_0-\omega)t \sin\omega_0 t}{\omega-\omega_0} \right.$$

$$\left. - \frac{\sin(\omega_0+\omega)t \cos\omega_0 t - \cos(\omega_0+\omega)t \sin\omega_0 t}{\omega+\omega_0} \right\}$$

$$- \frac{f_0 \omega}{\omega^2-\omega_0^2} \sin\omega_0 t = -f_0 \left\{ \frac{\sin\omega t}{2(\omega+\omega_0)} - \frac{\sin\omega t}{2(\omega-\omega_0)} + \frac{\omega \sin\omega_0 t}{\omega^2-\omega_0^2} \right\}$$

$$= f_0 \frac{-\omega \sin\omega_0 t + \omega_0 \sin\omega t}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

Donc, finalement :

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t + \frac{f_0}{\omega_0}\,\frac{\omega\sin\omega_0 t - \omega_0\sin\omega t}{\omega^2-\omega_0^2}.$$

<u>Question 7</u>
$$\begin{cases} x^2y'' - 2xy' + 2y = f(x) \\ y(1) = y(3) = 0 \end{cases}$$

Pour que ça devienne le problème classique à conditions limites en 2 points, on divise l'équation par x^2 :

$$y'' - 2x^{-1}y' + 2x^{-2}y = f(x)/x^2$$

1). L'équation homogène correspondante :

$$y'' - 2y'/x + 2y/x^2 = 0$$

On cherche les solution sous la forme $y(x) = x^{\nu}$:

$$\nu(\nu-1)\,x^{\nu-2} - 2\cdot\nu\, x^{\nu-1}/x + 2x^{\nu}/x^2 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\nu^2 - 3\nu + 2 = 0 \qquad \text{(éq. algébrique)}$$
$$\Downarrow$$
$$\nu_1 = 1,\quad \nu_2 = 2$$

donc la solution générale est

$$y_{hom}(x) = C_1 x + C_2 x^2.$$

2). On sait que la fonction de Green s'écrit :

$$G(x,y) = \begin{cases} C_1(y)\,x + C_2(y)\,x^2 & \text{pour } 1 \le x < y \le 3 \\ D_1(y)\,x + D_2(y)\,x^2 & \text{pour } 1 \le y < x \le 3 \end{cases}$$

2.1). Imposons les conditions limites

$$G(1,y) = 0 \Rightarrow C_1(y) + C_2(y) = 0 \Rightarrow C_2(y) = -C_1(y)$$
$$G(3,y) = 0 \Rightarrow 3D_1(y) + 9D_2(y) = 0 \Rightarrow D_1(y) = -3D_2(y)$$

Donc

$$G(x,y) = \begin{cases} C_2(y)\,(x^2 - x) & \text{pour } 1 \le x < y \le 3 \\ D_2(y)\,(x^2 - 3x) & \text{pour } 1 \le y < x \le 3 \end{cases}$$

2.2). Continuité en $x=y$ implique

$$C_2(y)\,(y^2 - y) = D_2(y)\,(y^2 - 3y) \Rightarrow C_2(y) = D_2(y)\,\frac{y-3}{y-1}$$

De même, le saut de $\frac{dG}{dx}(x,y)$ en $x=y$ implique

$$\left[\frac{d}{dx}G(x,y)\right]_{x=y-0}^{x=y+0} = D_2(y)(2y-3) - C_2(y)(2y-1) = 1$$

Donc

$$\Leftrightarrow \quad D_2(y)\left[(2y-3) - \frac{y-3}{y-1}(2y-1)\right] = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad D_2(y)\,\frac{\cancel{2y^2} - 5y + \cancel{3} - (\cancel{2y^2} - 7y + \cancel{3})}{y-1} = 1$$

$$\begin{cases} D_2(y) = \dfrac{y-1}{2y} \\ C_2(y) = \dfrac{y-3}{2y} \end{cases}$$

et l'expression finale pour la fonction de Green :

$$G(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2-x)(y-3)}{2y} & \text{pour } 1 \leq x < y \leq 3, \\ \dfrac{(x^2-3x)(y-1)}{2y} & \text{pour } 1 \leq y < x \leq 3. \end{cases}$$

3). La solution du problème initial est :

$$y(x) = \int_1^3 G(x,y)\frac{f(y)}{y^2}\,dy = \int_1^x \frac{(x^2-3x)(y-1)}{2y}\frac{f(y)}{y^2}\,dy + \int_x^3 \frac{(x^2-x)(y-3)}{2y}\frac{f(y)}{y^2}\,dy$$

Dans le cas $f(x) = \alpha x^3$:

$$y(x) = \int_1^x \frac{(x^2-3x)(y-1)}{2\cancel{y}}\alpha \cancel{y}\,dy + \int_x^3 \frac{(x^2-x)(y-3)}{2\cancel{y}}\alpha\cancel{y}\,dy =$$

$$= \frac{\alpha(x^2-3x)}{2}\int_1^x (y-1)\,dy + \frac{\alpha(x^2-x)}{2}\int_x^3 (y-3)\,dy =$$

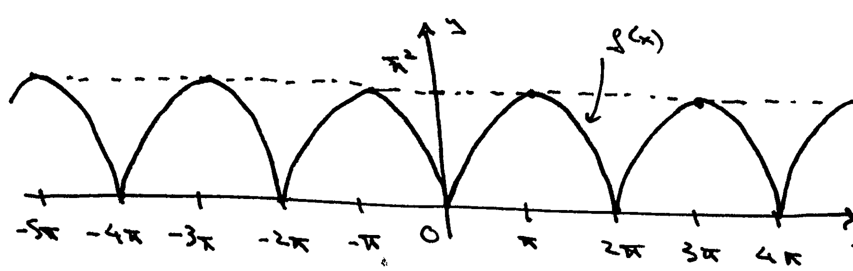
$$= \frac{\alpha(x^2-3x)}{2}\left[\frac{x^2-1}{2} - x + 1\right] + \frac{\alpha(x^2-x)}{2}\left[\frac{9-x^2}{2} - 3(3-x)\right] =$$

$$= \frac{\alpha(x-3)(x-1)x}{2}\left\{\frac{\cancel{x}+1}{2} - 1 - \frac{\cancel{x}+3}{2} + 3\right\} =$$

$$= \frac{\alpha x(x-1)(x-3)}{2}.$$

<u>Question 8.</u>

1).



2). $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \qquad \left(T = 2\pi \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 1\right).$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(2\pi - x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\pi x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(4\pi^3 - \frac{8\pi^3}{3}\right) = \frac{2\pi^2}{3}.$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos nx\,dx = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(2\pi - x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(2\pi - x)\,d\left(\frac{\sin nx}{n}\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{2}{\pi}\, x(2\pi - x)\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}}_{0} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{n}(2\pi - 2x)\,dx =$$

$$= -\frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi} (\pi - x)\,d\left(-\frac{\cos nx}{n}\right) =$$

$$= +\frac{4}{\pi n}(\pi - x)\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{4}{\pi n^2}\int_0^{\pi} \cos nx\,(-1)\,dx =$$

$$= -\frac{4}{n^2} + \underbrace{\frac{4}{\pi n^2}\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}}_{0} = -\frac{4}{n^2}.$$

Donc

$$\underbrace{S(x) = f(x)}_{\text{car } f(x) \text{ est continue, et } C^1 \text{ par morceaux}} = \frac{2\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

3). En utilisant

- $\cos nx = 1 - 2\sin^2 \frac{nx}{2}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (voir TD4)

on obtient

$$x(2\pi - x) = \frac{2\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - 2\sin^2\frac{nx}{2}}{n^2} =$$

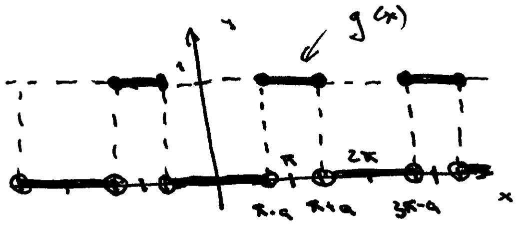
$$= \cancel{\frac{2\pi^2}{3}} - \cancel{4\cdot\frac{\pi^2}{6}} + 8\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2\frac{nx}{2}}{n^2} = 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{nx}{2}}{n^2}$$

Maintenant posons $x = 2a$:

$$2a(2\pi - 2a) = 8\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 na}{n^2}$$

$$\hookrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 na}{n^2} = \frac{a(\pi - a)}{2}.$$

4).



fonction g est paire, donc on peut la développer en série de cosinus :

$$g(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi-a}^{\pi+a} 1\cdot dx = \frac{a}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{\pi-a}^{\pi+a} 1\cdot\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\,\frac{\sin nx}{n}\Big|_{\pi-a}^{\pi+a} = \frac{1}{\pi n}\left(\sin n(\pi+a) - \sin n(\pi-a)\right) =$$

$$= \frac{2(-1)^n \sin na}{\pi n}$$

L'identité de Parseval :

$$|a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 = \frac{a^2}{\pi^2} + \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2}\,\frac{\sin^2 na}{n^2}$$

$$\shortparallel$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi-a}^{\pi+a} 1\cdot dx = \frac{a}{\pi}$$

Donc

$$\frac{a}{\pi} - \frac{a^2}{\pi^2} = \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 na}{n^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{a(\pi-a)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 na}{n^2} \quad \text{(résultat précédent).}$$

<u>Question 9</u>. Notons $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$

$$\left\langle\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)T_f\,,\ \varphi\right\rangle \overset{\text{def}}{=} \left\langle T_f\,,\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\varphi\right\rangle =$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\varphi\,dx\,dy = \left|\begin{array}{l}\text{en intégrant 1 fois}\\ \text{par parties}\end{array}\right| =$$

$$= -\iint_{\mathbb{R}^2}\left(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{\frac{2x}{x^2+y^2}}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{\frac{2y}{x^2+y^2}}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)dx\,dy =$$

$$= -2\iint_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{y}{x^2+y^2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)dx\,dy =$$

$$= -2\iint_{\mathbb{R}^2}\Big\{\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{x}{x^2+y^2}\varphi\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{y}{x^2+y^2}\varphi\Big)-\varphi\underbrace{\cancel{\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2}}}_{=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}}-\varphi\underbrace{\cancel{\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{x^2+y^2}}}_{=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}}\Big\}dx\,dy =$$

$$= -2\iint_{\mathbb{R}^2}\Big\{\frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\Big(\frac{x}{x^2+y^2}\varphi\Big)}_{Q}-\frac{\partial}{\partial y}\underbrace{\Big(-\frac{y}{x^2+y^2}\varphi\Big)}_{P}\Big\}dx\,dy =$$

notons

$$= -2\iint_{\mathbb{R}^2}\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)dx\,dy =$$

$$= -2\iint_{\mathbb{R}^2\setminus\{0\}}\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)dx\,dy$$

$$= +2\lim_{\varepsilon\to 0}\oint_{C} P\,dx + Q\,dy \;\circleddash$$

où C est le cercle de rayon ε autour de 0. Ceci implique

on aimerait appliquer la formule de Green

$$\iint_D\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)dx\,dy = \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy$$

mais nos fonctions ne vérifient pas les conditions nécessaires en $x=0=y$

$$\circleddash\; 2\lim_{\varepsilon\to 0}\oint_{C}\Big(-\frac{y\,\varphi(x,y)}{x^2+y^2}dx + \frac{x\,\varphi(x,y)}{x^2+y^2}dy\Big) =$$

$x=\varepsilon\cos\theta$, $y=\varepsilon\sin\theta$
$\theta\in[0,2\pi]$
$dx=-\varepsilon\sin\theta\,d\theta$
$dy=\varepsilon\cos\theta\,d\theta$

$$= 2\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi}\Big(-\frac{\cancel{\varepsilon}\sin\theta\,\varphi(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)(-\cancel{\varepsilon}\sin\theta\,d\theta)}{\cancel{\varepsilon^2}} + \frac{\cancel{\varepsilon}\cos\theta\,\varphi(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)(\cancel{\varepsilon}\cos\theta\,d\theta)}{\cancel{\varepsilon^2}}\Big) =$$

$$= 2\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi}\varphi(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)\,d\theta = 4\pi\cdot\varphi(0)$$

Donc, au sens des distributions,

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)\ln(x^2+y^2) = 4\pi\,\delta(x)\,\delta(y)$$